ROYAUME DU MAROC

Ministère Chargé de l'Enseignement
Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2000

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions et notations

Soit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec $T > 0$; Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute application $f \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et T-périodique on pose :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt.$$

Les $c_n(f)$ sont appelés les coefficients de Fourier complexes de f.

Étant donnée une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, on dit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ converge si les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_{-n}$ convergent. En cas de convergence, on pose :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}.$$

Partie I

1. Soit $f \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et T-périodique.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ en fonctions des coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de f. Que vaut $c_0(f)$?
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ exprimer la somme $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ik\omega x}$ à l'aide de la somme partielle d'indice n associée à la série de Fourier de f qu'on notera $S_n(f)(x)$.
   (c) Donner un énoncé du théorème de Dirichlet faisant intervenir les coefficients de Fourier complexes de f.
2. Soit $f \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On prolonge la restriction de f à l'intervalle $[0, 1[$ en une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ notée g.
   (a) Vérifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
   (b) Exprimer les coefficients de Fourier complexes de g à l'aide d'une intégrale faisant intervenir la fonction$f$.
   (c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}\,dt$ est convergente de somme $\frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big)$.

3. Soient $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ avec $p < q$.

   (a) Montrer que pour tout $k \in \{p, \ldots, q-1\}$ on a :
$$\frac{1}{2}\big(f(k) + f(k+1)\big) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t) e^{-2i\pi nt}\, dt.$$

   (b) En déduire que
$$\frac{1}{2}f(p) + \sum_{k=p+1}^{q-1} f(k) + \frac{1}{2}f(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_p^q f(t) e^{-2i\pi nt}\, dt.$$

Partie II

Le but de cette partie est de calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme de Gauss notée σ_n suivante :
$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi \frac{k^2}{n}}.$$

1. Simplifier l'expression $e^{-2i\pi n \frac{k^2}{4}}$ selon la parité de l'entier k.
2. Montrer que pour tout entier p on a :
$$\int_0^n e^{2i\pi(\frac{t^2}{n} - pt)}\, dt = \int_{-pn}^{(-p+1)n} e^{2i\pi\frac{u^2}{n}}\, du \ + i^{-n} \int_{-(p+\frac{1}{2})n}^{(-p+\frac{1}{2})n} e^{2i\pi\frac{u^2}{n}}\, du.$$
3. Montrer avec soin que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha u^2} du$ est convergente.
   (On pourra utiliser une intégration par partie.)
4. Démontrer alors que
$$\sigma_n = (1 + i^{-n}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\frac{u^2}{n}}\, du.$$
5. On pose $J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\frac{u^2}{n}} du$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Trouver une relation entre J_n et J_1.
   (b) Calculer J_1 à l'aide de ce qui précède et donner l'expression de σ_n.

Partie III

1. Montrer que pour tout réel $t > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2}$ est convergente.
   On pose alors
$$\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t n^2}, \ t > 0.$$
2. Montrer que la fonction χ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que
$$\forall\, t > 0,\ 0 < \chi(t) - 1 \leqslant \frac{2}{e^{\pi t} - 1}$$
et en déduire la limite de χ en $+\infty$.

4. Montrer en utilisant la question I-3-b que : $\forall\, t > 0,\ \ \chi(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{-n}^{n} e^{-(\pi t x^2 + 2i\pi p x)}\, dx.$

5. Montrer que $\displaystyle\int_{-n}^{n} e^{-(\pi t x^2+2i\pi p x)}\, dx = \frac{-nte^{-\pi t n^2}}{\pi p^2} + \frac{t}{2\pi p^2}\int_{-n}^{n} (1-2\pi t x^2) e^{-(\pi t x^2+2i\pi p x)}\, dx,\ (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*$.

6. Soit $t > 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-(\pi t x^2+2i\pi p x)}\, dx$ est convergente.

7. En déduire que pour tout $t > 0$ il existe une constante $M(t)$ telle que
$$\forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*,\ \left| \int_{-n}^{n} e^{-(\pi t x^2+2i\pi p x)}\, dx \right| \leqslant \frac{M(t)}{p^2}.$$

8. Soient $\varepsilon > 0$ et $t > 0$.
   (a) Justifier l'existence de $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{p=N+1}^{+\infty} \frac{M(t)}{p^2} \leqslant \varepsilon$ pour tout entier $N \geqslant \mathbb{N}_0$.
   (b) En écrivant, pour tout $N \geqslant N_0$, que
   $$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{-n}^{n} e^{-(\pi t x^2+2i\pi p x)}\, dx = \sum_{p=-N}^{N} \int_{-n}^{n} e^{-(\pi t x^2+2i\pi p x)}\, dx + \sum_{|p|\geqslant N+1} \int_{-n}^{n} e^{-(\pi t x^2+2i\pi p x)}\, dx$$
   montrer que l'on a :
   $$\chi(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2 - 2i\pi p x}\, dx.$$

9. Pour $a \in \mathbb{R}$ on pose $f(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+iax}\, dx$.
   (a) Montrer que f est bien définie et qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f satisfait l'équation différentielle
   $$(E)\ \ y' + \frac{a}{2} y = 0.$$
   (c) Résoudre l'équation différentielle (E) et conclure qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t > 0$ on ait :
   $$\chi(t) = \frac{K}{\sqrt{\pi t}} \chi(\frac{1}{t}).$$
   (d) Donner alors la valeur de K ainsi que celle de $f(0)$.

10. Montrer que
$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} + \underset{t\to 0}{\circ}(1).$$

FIN DE L'ÉPREUVE